4. Präsenzübung zur Fortgeschrittenen Quantentheorie, SS 2010

(zu bearbeiten am Dienstag, 01.06.2010)

Aufgabe P7 *Entropie als Maß für Verschränkung?*

Die Entropie eines quantenmechanischen Zwei-Zustands-Systems ist gegeben durch

$$S = -\,\mathrm{tr}\,(\varrho \log_2 \varrho) \ ,$$

wobei der Logarithmus einer Matrix über ihre Darstellung in der Eigenbasis definiert ist. Überlegen Sie sich, ob die Entropie der reduzierten Dichtematrix eines Zwei-Teilchen-Systems ein gutes Maß für die Verschränkung des Gesamtsystems ist: Gegeben seien

a) $|\psi_a\rangle = |00\rangle$,

b) $|\psi_b\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle + |10\rangle)$,

c) $\varrho_c = \frac{1}{2}\mathbb{1} \otimes \frac{1}{2}\mathbb{1}$.

Wie groß ist in jedem der drei Fälle die Entropie der reduzierten Dichtematrix des ersten Teilsystems? Begründen Sie, warum Sie die Entropie als Verschränkungsmaß akzeptieren oder nicht akzeptieren.

Aufgabe P8 *Quantennatur von Drei-Teilchen-Korrelationen*

Gegeben sei ein System von drei Spin-$\frac{1}{2}$-Teilchen in dem Zustand

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(|\uparrow\uparrow\uparrow\rangle - |\downarrow\downarrow\downarrow\rangle\Big) \ ,$$

ein sogenannter GHZ-Zustand (benannt nach Greenberger, Horne und Zeilinger).

a) Zeigen Sie, dass $|\psi\rangle$ ein Eigenvektor zu den Operatoren $\sigma_{1x}\sigma_{2y}\sigma_{3y}$, $\sigma_{1y}\sigma_{2x}\sigma_{3y}$, $\sigma_{1y}\sigma_{2y}\sigma_{3x}$ sowie $\sigma_{1x}\sigma_{2x}\sigma_{3x}$ ist. (Der erste Index einer Pauli-Matrix bezieht sich auf die Nummer des Teilchens, der zweite auf die Art der Pauli-Matrix.) Was ist jeweils der Eigenwert? Zeigen Sie, dass diese vier Operatoren kommutieren.

b) Es werden nun Spin-Messungen an den drei Teilchen im Zustand $|\psi\rangle$ durchgeführt. Das Ergebnis einer Spin-Messung des $i$ten Teilchens in x-Richtung (d.h. der Eigenwert von σ_{ix}) kann $+1$ oder -1 sein und sei mit m_{ix} bezeichnet. Welchen Wert hat $m_{1x}m_{2x}m_{3x}$ nach Teil (a)? Jedem der Operatoren σ_{ix} mit $i = 1, 2, 3$ entspricht ein „Element der Realität“, da sein Wert im Zustand $|\psi\rangle$ *mit Sicherheit* aus der Messung von σ_x an den zwei anderen Teilchen vorgesagt werden kann.

c) Betrachten Sie nun die anderen drei in Teil a) angegebenen Kombinationen von Messungen und leiten Sie einen Widerspruch her zu der Annahme, dass $m_{i\nu}$ in beiden Messkombinationen, in denen es vorkommt, den gleichen Wert annimmt. Damit haben Sie (wie schon Mermin 1990) gezeigt, dass die Korrelationen in $|\psi\rangle$ quantenmechanischer Natur sind.